



## City Research Online

### City, University of London Institutional Repository

---

**Citation:** Estelles Martinez, S. & Tomas-Rodriguez, M. (2014). Seguimiento de trayectorias tridimensionales de un quadrotor mediante control PVA. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 11(1), pp. 54-67. doi: 10.1016/j.riai.2013.11.004

This is the published version of the paper.

This version of the publication may differ from the final published version.

---

**Permanent repository link:** <https://openaccess.city.ac.uk/id/eprint/17726/>

**Link to published version:** <https://doi.org/10.1016/j.riai.2013.11.004>

**Copyright:** City Research Online aims to make research outputs of City, University of London available to a wider audience. Copyright and Moral Rights remain with the author(s) and/or copyright holders. URLs from City Research Online may be freely distributed and linked to.

**Reuse:** Copies of full items can be used for personal research or study, educational, or not-for-profit purposes without prior permission or charge. Provided that the authors, title and full bibliographic details are credited, a hyperlink and/or URL is given for the original metadata page and the content is not changed in any way.

---

---



## Seguimiento de trayectorias tridimensionales de un quadrotor mediante control PVA

Silvia Estellés Martínez\*, María Tomás-Rodríguez

*School of Engineering and Mathematical Sciences,  
Northampton Square, The City University  
Londres, Reino Unido.*

### Resumen

Este trabajo presenta el modelado de un quadrotor como un sistema multicuerpo llevado a cabo mediante el software VehicleSim, en el que los diferentes componentes del sistema son descritos mediante una estructura paterno-filial señalando las restricciones físicas entre ellos. Los modelos estructural y aerodinámico han sido desarrollados mediante este software, ampliamente utilizado en la simulación del comportamiento dinámico de vehículos.

Sobre el modelo resultante se ha desarrollado un algoritmo de control basado en la metodología PVA con la finalidad de obtener un seguimiento de trayectoria mediante acciones de control suaves. Empleando la metodología convencional de control PVA no es posible estabilizar el vehículo en todos los rangos de posicionamiento lateral (y) y longitudinal (x). En este artículo los autores muestran como esta limitación en el diseño de una estrategia de control PVA convencional es solventada con una modificación consistente en sustituir los parámetros constantes del PVA clásico por funciones dependientes del desplazamiento.

El sistema de control es implementado para adecuarse a los requerimientos de las actuaciones y se diseña sobre la plataforma de simulación multidominio Simulink. Con la finalidad de obtener una importante mejora en la respuesta de posicionamiento, se implementa un generador de trayectorias continuas.

Una vez que el modelo es desarrollado y el sistema de control implementado, los autores presentan el modelo matemático y los resultados de las simulaciones realizadas. Éstas validan el empleo tanto de la metodología de control PVA aplicada, como de la alimentación de trayectorias predefinidas, no sólo para la posición, sino también para la velocidad y aceleración. *Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.*

**Palabras Clave:** quadrotor, VehicleSim, modelado multicuerpo, control trayectoria, PVA.

### 1. Introducción

El empleo de quadrotores se encuentra en auge debido al gran número de posibles aplicaciones. Este tipo de vehículos presenta numerosas ventajas en misiones con riesgo para vuelos tripulados, con requerimientos de elevada maniobrabilidad o dimensiones reducidas de las aeronaves.

La reciente evolución de las tecnologías empleadas en los quadrotores, la miniaturización de sensores y actuadores y los progresos en las comunicaciones apuntan a un aumento del uso generalizado de estas plataformas (Béjar and Ollero, 2008). Han demostrado un gran desempeño en operaciones con riesgo tales como desastres naturales e inspección de instalaciones y estructuras a gran altitud o de difícil acceso. También en aplicaciones

en las que el elevado coste de operación de las aeronaves tripuladas no compensa el resultado obtenido (Ollero and Maza, 2007). Los quadrotores presentan además las características del despegue y aterrizaje vertical y de vuelo estacionario, conocido como *hover*, lo cual lo convierte en un dispositivo apto para la ejecución de maniobras en espacios reducidos.

Para un correcto desempeño de las actuaciones del quadrotor en cualquier aplicación, es necesario asegurar un comportamiento estable capaz de seguir las trayectorias indicadas con precisión. Es de vital importancia evitar las acciones de control que puedan desestabilizar la plataforma o introduzcan vibraciones indeseadas en la misma. Esta función la desempeña el sistema de control.

Diferentes estrategias han sido abordadas en los últimos tiempos para el control de quadrotores: controladores PID (Zhou et al., 2010), métodos basados en backstepping (Castillo et al.,

\* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: Silvia.Estelles.1@city.ac.uk (Silvia Estellés Martínez), Maria.Tomas-Rodriguez.1@city.ac.uk (María Tomás-Rodríguez)

2006) y (Tarek and Abdelaziz, 2007), regulador de índice cuadrático LQR (Lee et al., 2011), controles predictivos no lineales (Alexis et al., 2012), redes neuronales (Voos, 2007), controles basados en métodos de Lyapunov (Mian and Daobo, 2008) y técnicas basadas en inteligencia artificial, todavía en fase de implementación. La estrategia de control empleada debe ser de respuesta precisa además de rápida.

El diseño de estos métodos de control comienza con el estudio de su aplicación a modelos que reflejen de forma precisa la dinámica no lineal de la plataforma. La mayoría de los modelos empleados para el diseño de controladores son modelos linealizados que consideran el quadrotor como un sólido rígido dotado de diferentes grados de libertad; altura y orientación (Giraldo et al., 2010), y desplazamiento lateral (Achtelik et al., 2008). Menos comunes son aquellos modelos que consideran los efectos aerodinámicos y aeroelásticos de las palas en rotación sobre las fuerzas de sustentación y resistencia (Chao and Shoufeng, 1995) (UAV de ala rotatoria de configuración convencional en este caso).

Dada la importancia de un modelo preciso para el diseño del controlador, en este trabajo se desarrolla un nuevo modelo de quadrotor mediante la herramienta de modelado multicuerpo VehicleSim (VehicleSim, 2012). Éste es un software avanzado empleado en simulaciones de comportamiento dinámico de vehículos, que considera interacciones entre la dinámica tridimensional del vehículo y la dinámica de los controladores. VehicleSim permite desarrollar modelos complejos mediante la técnica multicuerpo; los comandos se emplean para describir el sistema con una estructura paterno-filial de acuerdo a las conexiones físicas entre los cuerpos. A partir del modelo multicuerpo se obtienen las ecuaciones del comportamiento dinámico del sistema mediante las ecuaciones de Kane (Kourosch, 2007). Tanto los modelos estructural como aerodinámico que representan la dinámica del quadrotor han sido modelados mediante VehicleSim. Los autores pretenden emplear este modelo (estructural y aerodinámico) como base para el desarrollo de un completo modelo de quadrotor que incluya grados de libertad adicionales para los álabes de los rotores, así como las vibraciones producidas por esta consideración.

La metodología de control PVA (posición-velocidad-aceleración) consiste en aplicar una acción de control proporcional al error de posición, al error de velocidad y al error de aceleración. Para calcular estos errores, es necesario disponer de unas referencias de posición, velocidad y aceleración que son prealimentadas al sistema y que sustraídas a la posición, velocidad y aceleración del quadrotor proporcionan los errores.

El empleo del error de aceleración para las variables lineales diferencia este método de otros que emplean solamente la realimentación del error de posición y velocidad como los métodos basados en backstepping o  $h_\infty$  (Raffo et al., 2010). Si bien es cierto que algunos métodos incluyen la prealimentación de aceleración lineal predefinida para el cálculo de las acciones de control (Bouabdallah and Siegwart, 2007), éstos no consideran el error de aceleración lineal, el cual juega un factor decisivo en

la supresión de la sobreoscilación en el seguimiento de trayectorias (Ning and Bone, 2002) y que ha sido el motivo por el que este método de control, no aplicado a quadrotores previamente pero sí ampliamente empleado en el posicionamiento de sistemas mecánicos, ha sido implementado.

Además, el sistema de control diseñado presenta una modificación sobre el método PVA que consiste en la consideración de funciones del error de posición como parámetros de control para las variables controladas indirectamente.

El trabajo aquí presentado está estructurado en las siguientes secciones: la sección 2 describe la estructura general del sistema, su funcionamiento básico y una descripción general de las fuerzas y momentos aerodinámicos que contribuyen a su movimiento así como la introducción a la nomenclatura empleada en el artículo. Se describe también la herramienta de modelado dando cuenta de las ventajas de su utilización a la hora de estudiar sistemas rígidos multicuerpo y una descripción de la estructura del programa de simulación desarrollado para las tareas de modelado. La sección 3 describe la estrategia de control PVA modificada diseñada sobre la plataforma Simulink (Simulink, 2012) para conseguir el seguimiento de una trayectoria predefinida. La sección 4 contiene los resultados de las simulaciones donde se demuestra la eficacia del método de control propuesto. La sección 5 contiene las conclusiones e indicaciones sobre la línea de trabajo de los autores.

## 2. Modelado del Quadrotor

Los quadrotores son vehículos cuya propulsión y elevación se consigue gracias a la acción de cuatro rotores equiespaciados alrededor de una estructura central. La propulsión se produce debido a la rotación de las palas de los rotores con un determinado ángulo de ataque. El control sobre la trayectoria del quadrotor se consigue mediante el cambio de la velocidad angular de uno o más de los rotores, produciendo así un cambio en la propulsión producida por cada rotor. Los sistemas de control y sensores electrónicos normalmente se encuentran alojados en el cuerpo central del vehículo y son utilizados para lograr la estabilización del mismo (Hoffmann et al., 2004) y (Büchi, 2011).

### 2.1. Descripción del Funcionamiento de un quadrotor

Las fuerzas presentes que dominan el comportamiento del quadrotor son el peso y las fuerzas aerodinámicas (sustentación y resistencia), representadas en la Figura 1.

La fuerza resultante del peso,  $W$ , actúa sobre el centro de masas de la estructura y va dirigida hacia el centro de la Tierra (representada en azul en la Figura 1). La fuerza aerodinámica es producida por la distribución de presiones y la distribución de cortante sobre la superficie del objeto, ambas debidas al movimiento relativo de un objeto respecto al aire que lo rodea, siendo en este caso el objeto las palas de los rotores. El efecto neto de estas distribuciones integradas a lo largo de toda la superficie del cuerpo es la fuerza resultante aerodinámica, situada en el centro de presiones. Esta fuerza se divide en dos componentes: sustentación y resistencia.

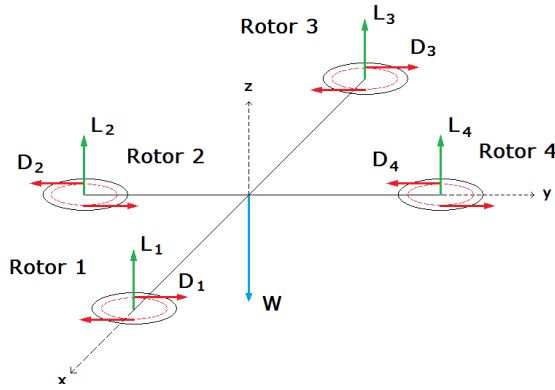


Figura 1: Diagrama representativo de la disposición de los rotores alrededor del cuerpo central y de las fuerzas de sustentación (L), resistencia (D) y peso (W).

- **Sustentación o lift (L).** Es la componente de la fuerza aerodinámica perpendicular a la dirección del movimiento relativo entre el objeto y la corriente de aire. En dispositivos sustentadores como las palas, lo común es que la fuerza tenga sentido ascendente para contrarrestar así la fuerza gravitatoria (representada en verde en la Figura 1).
- **Resistencia o drag (D).** Es la componente de la fuerza aerodinámica paralela a la dirección del movimiento relativo entre el objeto y la corriente de aire. Esta fuerza se opone al avance del cuerpo, de ahí su nombre (representada en rojo en la Figura 1). Las fuerzas de resistencia que actúan en cada rotor pueden modelarse como un par que disminuye su velocidad angular (Figura 2).

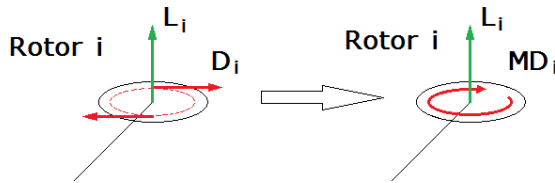


Figura 2: Equivalencia de las fuerzas de drag (D) con los momentos de drag (MD) modelados con VehicleSim.

Una práctica común en aerodinámica es el cálculo de las fuerzas aerodinámicas a través de los coeficientes aerodinámicos de un objeto, los cuales pueden ser obtenidos experimentalmente. Estos coeficientes adimensionales se definen como:

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} \quad (1)$$

$$C_D = \frac{D}{q_\infty S} \quad (2)$$

donde  $q_\infty$  representa la presión dinámica dada por la ecuación (3) y  $S$  representa una superficie de referencia.

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \quad (3)$$

En la ecuación (3),  $\rho_\infty$  representa la densidad de referencia del aire y  $V_\infty$  representa la velocidad relativa entre el aire y el objeto. De esta forma, conociendo el valor de los coeficientes, es posible calcular fácilmente las fuerzas aerodinámicas:

$$L = C_L q_\infty S = C_L \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \quad (4)$$

$$D = C_D q_\infty S = C_D \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \quad (5)$$

En este tipo de plataformas de ala rotatoria que poseen cuatro rotores que giran en sentidos opuestos (los rotores 1 y 3 de la Figura 1 giran en sentido antihorario y los rotores 2 y 4 giran en sentido horario), existen cuatro variables de control: los momentos aplicados a los rotores. Variando estos momentos y mediante el balance de las fuerzas de sustentación así generadas alrededor de los diferentes ejes asociados a la estructura, se consigue el movimiento de la misma.

- El movimiento en altura,  $z$ , viene determinado por el balance entre la fuerza gravitatoria,  $W$ , y la componente vertical del empuje total de los cuatro rotores,  $\sum L_i, i = 1 \dots 4$ . Aumentando la velocidad de rotación de los rotores de forma simultánea aumenta la fuerza total de sustentación, ya que ésta depende de la velocidad relativa de los álabes con respecto al aire (4) generando un desplazamiento vertical. Por el contrario, si disminuye la velocidad de rotación, también lo hace la sustentación total, con lo que disminuye la altura.
- El movimiento de *roll* o alabeo,  $\phi$ , alrededor del eje  $x$  de la estructura, viene determinado por el balance de los momentos que las fuerzas de sustentación generan en torno al punto central de la misma, viéndose involucrados solamente los rotores alineados en el eje  $y$  (rotores 2 y 4 en la Figura 3). Aumentando la velocidad de rotación del rotor 4 y disminuyendo la velocidad de rotación del rotor 2 ( $L_4 > L_2$ ) se produce un movimiento de *roll* positivo alrededor del eje  $x$ , si por el contrario se disminuye la velocidad de rotación del rotor 4 y se aumenta la del rotor 2 ( $L_4 < L_2$ ), se produce un movimiento de *roll* negativo.
- De manera semejante, el movimiento de *pitch* o cabeceo,  $\theta$ , alrededor del eje  $y$  viene determinado por el balance de los momentos generados por las fuerzas de propulsión asociadas a los rotores alineados en el eje  $x$  (rotores 1 y 3 en la Figura 3). De manera similar al movimiento de *roll*, aumentando la velocidad de rotación del rotor 3 y disminuyendo la del rotor 1 ( $L_3 > L_1$ ), se produce un movimiento positivo de *pitch* mientras que aumentando la velocidad de rotación del rotor 1 y disminuyendo la del 3 ( $L_3 < L_1$ ) se produce un movimiento de *pitch* negativo.
- El movimiento de *yaw* o guiñada,  $\psi$ , viene determinado por los momentos de reacción de los rotores en respuesta a los momentos aplicados desde la estructura. Moderando el valor de los momentos aplicados a los rotores, se puede controlar cual es el momento que éstos transmiten a la estructura en respuesta y que será el que genere

el movimiento de guiñada alrededor del eje vertical asociado al quadrotor. Aplicando un momento mayor a los rotores 2 y 4 que a los rotores 1 y 3 ( $M_4, M_2 > M_3, M_1$ ) se obtiene un movimiento de *yaw* positivo, mientras que aplicando un momento mayor a los rotores 1 y 3 que a los rotores 2 y 4 ( $M_4, M_2 < M_3, M_1$ ) se obtiene un giro de *yaw* negativo.

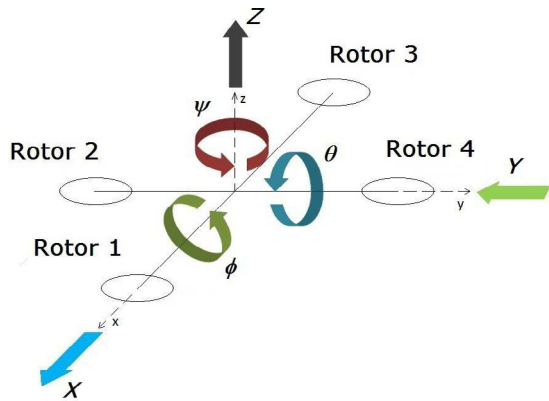


Figura 3: Diagrama representativo de la disposición de los rotores alrededor del cuerpo central y de los movimientos del quadrotor.

Puesto que el quadrotor dispone de 6 grados de libertad, tres rotacionales y tres traslacionales, y sólo de 4 variables de control, resulta obvio que algunas variables están relacionadas entre ellas. Efectivamente, el desplazamiento lateral y longitudinal viene determinado por la componente horizontal de la sustentación, que está relacionado con la sustentación total a través de la orientación del quadrotor.

- En caso de existir sólo orientación de *pitch*, la traslación longitudinal depende de la fuerza de sustentación total y del  $\cos \theta$ , con lo que variando adecuadamente el ángulo de *pitch* se consigue el desplazamiento deseado a lo largo del eje *x*. Con un ángulo de *pitch* positivo se obtiene un desplazamiento positivo en el eje *x*, como se ve en la Figura 3, mientras que con un ángulo negativo se obtiene un desplazamiento negativo.
- En caso de existir sólo orientación de *roll*, la traslación lateral depende de la fuerza de sustentación total y del  $\cos \phi$ , con lo que variando adecuadamente el ángulo de *roll* se consigue el desplazamiento deseado a lo largo del eje *y*. A diferencia del movimiento longitudinal, en el caso del desplazamiento lateral, un ángulo de *roll* positivo produce un desplazamiento en el sentido negativo del eje, mientras que un ángulo negativo produce un desplazamiento en el sentido positivo del eje, como indica la Figura 3.

En caso de existir combinaciones de estas inclinaciones o de existir además orientación de *yaw* no nula, la relación entre el desplazamiento lateral y longitudinal con la fuerza total de propulsión no es tan directa como en los dos casos anteriores ya

que el sistema de referencia (SR) asociado al quadrotor difiere del SR inercial en el cual se expresan las referencias posicionales. La relación entre las variables de posición expresadas en el SR inercial con respecto a las expresadas en el SR solidario al cuerpo viene dada por la matriz de rotación de los ángulos de Euler, *R*, representada en la ecuación (6).

## 2.2. Herramienta de Modelado

Tal y como se mencionó en la introducción, el programa de modelado utilizado en este trabajo es VehicleSim. Es un programa de modelado y simulación de sistemas rígidos multicuerpo. La antigua versión de este programa, AutoSim, ha sido utilizada previamente por miembros de este grupo de trabajo en problemas de modelado y control de sistemas mecánicos (Plasencia et al., 2012), (Ramírez et al., 2012), (Tomás-Rodríguez and Sharp, 2007), (Steele and Guy, 1984), (Sharp et al., 2004), (Sharp et al., 2005), (Mousseau et al., 1992), (Evangelou et al., 2008) y (Evangelou et al., 2012). VehicleSim consta de conjuntos de macros LISP que permiten la descripción de sistemas mecánicos de varios cuerpos, con la posible adición de subsistemas no mecánicos. Permite desarrollar modelos complejos mediante la técnica multicuerpo; los comandos se emplean para describir el sistema con una estructura paterno-filial de acuerdo a las uniones físicas de los cuerpos.

Consta de dos programas independientes e interrelacionados, VS-Lisp y VS-Browser. En VS-Lisp se considera que cada cuerpo del sistema es rígido y queda determinado por sus grados de libertad (traslación y rotación), su masa y su matriz de inercia así como por su relación con los demás cuerpos. Dicha relación es de carácter parental por lo que se crea un sistema de referencia propio de cada cuerpo dependiente del sistema de referencia del cuerpo ascendente. También es necesario definir las fuerzas/momentos que son aplicados a cada cuerpo. A partir del modelo multicuerpo, se obtienen las ecuaciones del comportamiento dinámico del sistema mediante las ecuaciones de Kane. Haciendo uso de la formulación avanzada de las ecuaciones de Kane y aplicando métodos de optimización algebraica y computacional, el programa genera las ecuaciones del movimiento partiendo exclusivamente de una descripción física del sistema. VS-Browser utiliza los resultados provistos por VS-Lisp para llevar a cabo las simulaciones del sistema modelado pudiendo realizar simulaciones bajo distintas condiciones operativas. Una ventaja de este software es que las reglas sintácticas son sencillas y su estructuración es muy flexible.

Una vez que el modelo ha sido generado y compilado, el fichero resultante es independiente de VehicleSim y puede ser ejecutado tantas veces como se desee sin necesidad de modelar o compilar de nuevo aunque cambien las condiciones iniciales de las variables de estado.

Se emplea este software, entre otros muchos disponibles en el mercado, debido a las ventajas que presenta: representación de sistemas complejos formados por diversos cuerpos y elementos no mecánicos, cuantificación de la interacción entre estos cuerpos, obtención de las ecuaciones lineales y no lineales, resolución numérica de las ecuaciones y compatibilidad con otras plataformas especializadas en simulación y control, como Si-



$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

mulink, con la que se ha llevado a cabo la implementación del control.

### 2.3. Estructura del programa

Las primeras líneas del código incluyen los comandos que definen el sistema de unidades a utilizar, realizan linealización de las ecuaciones de movimiento en caso de necesitarse y posibilitan la activación o desactivación de la fuerza de gravedad. El resto de comandos del programa describen de forma secuencial los cuerpos rígidos que conforman el sistema. En esta descripción se incluyen datos de los parámetros tales como masas, inercias, centros de gravedad y los sentidos de las rotaciones y traslaciones permitidas. El sistema modelado en este trabajo consta de tres subsistemas: cuerpo principal, rotores y palas conectadas a los rotores. Este modelo se encuentra aún en fase de desarrollo y los autores presentarán en futuras comunicaciones un modelo más completo en el que se incluyan características como la flexibilidad y grados de libertad de las palas. De esta forma, la interacción entre el aire o las fuerzas aerodinámicas y la estructura podría ser tenida en cuenta más en profundidad. Aunque el software VehicleSim no permite modelar la flexibilidad de manera directa, ya que trabaja con sólidos rígidos, permite la interacción con otros softwares o códigos durante la simulación, de manera que las deformaciones pueden ser calculadas externamente e incluidas en el modelo aerodinámico. Para el objeto de estudio de este trabajo, el modelo de palas rígidas aquí descrito es una buena representación del comportamiento dinámico del vehículo.

El modelo estructural es "parental"; está definido de acuerdo a las ligaduras físicas y articulaciones existentes entre los cuerpos que conforman el sistema. De esta forma, cada cuerpo del sistema es "padre" de los componentes que se añaden posteriormente, y será "hijo" de los añadidos con anterioridad. En VehicleSim, los sistemas de coordenadas son Cartesianos definidos por (i) un sistema de referencia al cual se asocia el sistema de coordenadas, (ii) un punto origen, y (iii) tres direcciones ortogonales entre sí que definen los ejes. Al añadir el primer cuerpo rígido sobre el sistema de referencia inercial,  $\mathbf{n}$ , que tiene un origen fijo  $\mathbf{n}_0$  y las direcciones  $[\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z]$ , aparece un nuevo sistema de referencia local y su correspondiente origen perteneciente al nuevo cuerpo añadido. El primer cuerpo rígido está formado por la estructura central y los cuatro brazos anexos al mismo, STR, que se encuentra inicialmente localizado en el origen del sistema inercial de coordenadas. Del cuerpo central dependen el resto de subsistemas o "hijos", en este caso son cuatro rotores con ejes de rotación situados equidistantes del centro geométrico de STR. Cada uno de los rotores,  $S_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) posee un sistema de referencia propio y ha sido dotado del correspondiente grado de libertad de rotación en  $z$ .

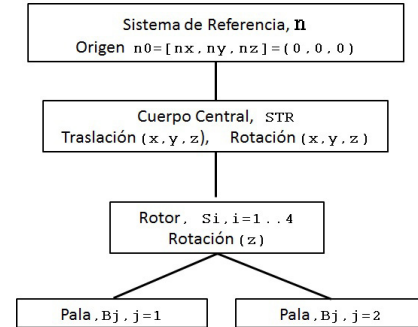


Figura 4: Estructura paterno-filial empleada en el montaje del modelo del quadrotor.

Finalmente, las palas  $B_j$ , ( $j = 1, \dots, 2$ ) son implementadas como hijas de los rotores.

La composición de la estructura dinámica y los grados de libertad de cada cuerpo con respecto al elemento "parental" correspondiente está representada en la Figura 4.

El modelo aerodinámico obvia la contribución de la velocidad de traslación,  $V_T$ , con respecto a la velocidad angular de los rotores,  $\Omega_i$ , por lo que la fuerza aerodinámica de sustentación ( $L_i$ ), y el momento aerodinámico de resistencia ( $MD_i$ ) para cada rotor, son proporcionales al cuadrado de la velocidad de rotación tal y como muestran las ecuaciones (7) y (8):

$$L_i = c_l \Omega_i^2 \quad (7)$$

$$MD_i = c_d \Omega_i^2 \quad (8)$$

Las constantes  $c_l$  y  $c_d$  son los correspondientes coeficientes de sustentación y resistencia que se obtienen de las especificaciones de los rotores. Estos están relacionados con los coeficientes aerodinámicos adimensionales,  $C_L$  y  $C_D$ , pero no son lo mismo sino que además incluyen parámetros geométricos y aerodinámicos de las palas, y  $\Omega_i$  es la velocidad angular de cada uno de los rotores  $i$ .

La fuerza de sustentación actúa sobre el centro aerodinámico de cada pala, pero como primera aproximación en este estudio, se puede situar en el centro del rotor o en el centro geométrico de cada pala. Dado que las palas no tienen ningún grado de libertad permitido con respecto al eje de rotación, estas dos últimas opciones son equivalentes desde el punto de vista del control. Dado que las fuerzas de Drag han sido modeladas como un momento y el principal efecto que éste tiene es reducir la velocidad de rotación, se aplica un momento en sentido opuesto adicional a los momentos de control. Este momento ha sido designado

como Counter Drag, MCD.

$$MCD_i = c_d \Omega_o^2 \quad (9)$$

$\Omega_o$  representa la velocidad angular de los rotores necesaria para mantener el quadrotor en vuelo estacionario, cuyo valor se obtiene de igualar la fuerza de sustentación total con el peso y es  $\sqrt{\frac{mg}{4c_l}}$ .

La aplicación de este momento responde a la necesidad de contrarrestar la disminución de velocidad de rotación debida al Drag en lugar de esperar que el sistema de control se encargue de ello.

El momento de Counter Drag aplicado emplea la velocidad de rotación en vuelo estacionario,  $\Omega_o$ , por dos razones: las velocidades de rotación de los rotores alcanzan este valor en *hover* y varían alrededor de este valor cuando el quadrotor realiza desplazamientos o giros, por lo que el momento de Counter Drag cancelará completamente el momento de Drag en *hover* y amortiguará la disminución de velocidad en los desplazamientos, dejando a cargo del sistema de control la diferencia entre la velocidad de rotación real y la velocidad de rotación estacionaria; además, al ser los momentos de Counter Drag constantes, el efecto de la reacción sobre la estructura se anula ya que dos momentos serían positivos y otros dos negativos, con el mismo valor.

Estas fuerzas y momentos aerodinámicos son expresados en VehicleSim mediante comandos, aplicándose sobre los rotores, indicando su dirección y magnitud mediante las relaciones algebraicas dadas por las expresiones (7)-(9).

#### 2.4. Ecuaciones del modelo

A continuación se presentan las ecuaciones que representan el modelo descrito anteriormente mediante el software VehicleSim. Las ecuaciones (10), (11) y (12) representan las aceleraciones lineales del quadrotor respecto al SR inercial ( $n_0$ ,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ ) expresadas en el SR asociado al cuerpo, y las ecuaciones (13), (14) y (15) representan las aceleraciones angulares del quadrotor respecto al SR inercial.

$$\ddot{X} = g \sin \phi + \dot{\psi} \dot{Y} - \dot{\phi} \dot{Z} \quad (10)$$

$$\ddot{Y} = -g \sin \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{X} + \dot{\theta} \dot{Z} \quad (11)$$

$$\ddot{Z} = -g \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \dot{Y} + \dot{\phi} \dot{X} + \frac{\mathbf{L}}{M_s + \sum_{i=1}^4 M_{b_i}} \quad (12)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{xx} + d^2(M_{b_2} + M_{b_4})} \left[ (I_{yy} - I_{zz} - d^2(M_{b_1} + M_{b_3})) \dot{\phi} \dot{\psi} - J_r \Omega \dot{\phi} - d(L_2 - L_4) + \sum_{i=1}^4 (r_{i1} L_{i1} - r_{i2} L_{i2}) \sin \gamma_i \right] \quad (13)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_{yy} + d^2(M_{b_1} + M_{b_3})} \left[ (I_{zz} - I_{xx} - d^2(M_{b_2} + M_{b_4})) \dot{\theta} \dot{\psi} + J_r \Omega \dot{\theta} - d(L_1 - L_3) + \sum_{i=1}^4 (r_{i2} L_{i2} - r_{i1} L_{i1}) \cos \gamma_i \right] \quad (14)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{xx} + d^2 \sum_{i=1}^4 M_{b_i}} \left[ (I_{xx} - I_{yy}) \dot{\theta} \dot{\phi} - \sum_{i=1}^4 (M C_i + M C D_i) \right] \quad (15)$$

En las anteriores ecuaciones,  $L_i$  representa la sustentación generada por las dos palas del rotor  $i$  mientras que  $L_{ij}$  representa la sustentación generada por la pala  $j$  del rotor  $i$  (debido a que el modelo aerodinámico no considera la velocidad de traslación, la sustentación de ambas palas del mismo rotor es igual a la mitad de la sustentación generada por el rotor).  $\mathbf{L}$  representa la sustentación total ( $\sum L_{ij}$ ) y  $\Omega$  la suma de todas las velocidades de rotación ( $\sum \Omega_i$ ). Los parámetros  $r_{ij}$  representan el punto de aplicación de las fuerzas de sustentación a lo largo de la pala (centro de presiones) y puesto que no se considera la velocidad de traslación, este valor no tiene importancia ya que ambos son iguales y sus contribuciones se anulan.

Puede comprobarse que las variables de control no aparecen explícitamente en las ecuaciones del modelo (excepto en el caso del movimiento de *yaw*). Esto ocurre como consecuencia de considerar los momentos aplicados a cada rotor como las variables de control. Las leyes de control actúan de esta manera sobre las aceleraciones angulares de los rotores, aumentando o disminuyendo su velocidad angular de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\Omega_i(t) = \Omega_{i_{inicial}} + \int_{t_{inicial}}^t \dot{\Omega}_i(t) dt = \Omega_{i_{inicial}} + \frac{1}{J_r} \int_{t_{inicial}}^t M_i(t) dt \quad (16)$$

De esta manera, los términos de sustentación que aparecen en las ecuaciones (12)-(14) responden a la expresión:

$$L_i = c_l \Omega_i^2 = c_l \left[ \Omega_{i_{inicial}} + \frac{1}{J_r} \int_{t_{inicial}}^t M_i dt \right]^2 \quad (17)$$

Se ve claramente como el momento correspondiente,  $M_i$ , aparece ahora en la expresión de sustentación  $L_i$ .

En la Tabla 1 vienen recogidos los parámetros geométricos y aerodinámicos empleados en el desarrollo del modelo. Estos parámetros corresponden a uno de los quadrotores disponibles en las dependencias del *ai2* (Instituto de Automática e Informática Industrial), en la Universidad Politécnica de Valencia.

### 3. Sistema de Control

#### 3.1. Implementación del Control

La implementación del sistema de control sobre la dinámica del vehículo se ha llevado a cabo con Simulink. Este software es ampliamente empleado en el modelado de dispositivos eléctricos (Le-Huy, 2001), electrónicos (Karden et al., 2002) y (Ropp and González, 2009) y mecánicos (Hajjaji and Ouladsine, 2001), así como en control, tanto en diseño y simulación (Altas and Sharaf, 2007), como en control en tiempo real (Pivonka and Miksánek, 2007). Se utiliza también en la implementación de sensores o predictores (Qiu et al., 2004). Además, es posible la integración en tiempo real entre el sistema de control



Cuadro 1: Parámetros del modelado

Símbolo	Parámetro	Valor	Unidades
$M_s$	Masa de la estructura.	0,75	$Kg$
$M_{b_i}$	Masa del rotor $i$ .	0,035	$Kg$
$I_{xx}$	Inercia de la estructura alrededor de su eje X.	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$Kg/m^2$
$I_{yy}$	Inercia de la estructura alrededor de su eje Y.	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$Kg/m^2$
$I_{zz}$	Inercia de la estructura alrededor de su eje Z.	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$Kg/m^2$
$I_{xy}$	Producto de inercia de la estrucutra en los ejes XY.	0,0	$Kg/m^2$
$I_{zy}$	Producto de inercia de la estrucutra en los ejes ZY.	0,0	$Kg/m^2$
$I_{xz}$	Producto de inercia de la estrucutra en los ejes XZ.	0,0	$Kg/m^2$
$J_r$	Inercia del rotor alrededor de su eje Z.	$6 \cdot 10^{-5}$	$Kg/m^2$
$c_l$	Coficiente de sustentación.	$3,13 \cdot 10^{-5}$	$Ns^2$
$c_d$	Coficiente de resistencia.	$7,5 \cdot 10^{-7}$	$Nms^2$
$d$	Distancia entre los rotores y el centro de la estructura.	0,3	$m$

implementado en Simulink con el modelo dinámico de Vehicle-Sim.

El control del sistema se consigue mediante la variación de las velocidades angulares, ya que del cuadrado de éstas dependen las fuerzas y momentos aerodinámicos (ecuaciones (7) y (8)). Para modificar la velocidad de giro del rotor, se le aplica un momento desde la estructura; se consigue así controlar los 6 grados de libertad de la estructura STR.

### 3.2. Metodología de Control

En este trabajo los autores presentan una nueva versión del control PVA, consistente en la aplicación de una acción de control que es proporcional al error de posición, al de velocidad y al de aceleración tanto lineales como angulares. Este método es ampliamente empleado en el control de dispositivos de posicionamiento en los que se requiere la supresión de la sobreoscilación (Ning and Bone, 2002), contando entre sus bondades una sencilla implementación y una carga computacional más asequible que otros métodos más sofisticados. Mediante la metodología convencional del control PVA no es posible estabilizar el quadrotor en todos los rangos de posicionamiento de las variables lateral y longitudinal. En este trabajo exponemos que esta limitación en el diseño de una estrategia de control PVA convencional se puede solventar con una modificación a la metodología consistente en sustituir los parámetros

constantes del PVA clásico por ciertas funciones dependientes del desplazamiento.

Los momentos de control aplicados,  $MC$ , basados en esta variación de la metodología, responden a las expresiones (18)-(24).

- Control en altura. Los momentos aplicados para el control en altura tienen el mismo valor numérico, para producir la misma variación de velocidad angular en los cuatro rotores con la salvedad que en los rotores 1 y 3 el momento es positivo y en los rotores 2 y 4 el momento es negativo. Este cambio en el signo es debido al distinto sentido de rotación de los rotores.

$$(MC_i)_z = (-1)^{i+1} [(k_1)_z(z_{ref} - z) + (k_2)_z(\dot{z}_{ref} - \dot{z}) + (k_3)_z(\ddot{z}_{ref} - \ddot{z})] \quad (18)$$

- Control de *roll*. Dado que en el movimiento de *roll* sólo se ven implicados los rotores 2 y 4, éstos son los únicos sobre los que se aplica el control de *roll*.

$$(MC_2)_\phi = (k_1)_\phi(\phi_{ref} - \phi) + (k_2)_\phi(\dot{\phi}_{ref} - \dot{\phi}) + (k_3)_\phi(\ddot{\phi}_{ref} - \ddot{\phi}) \quad (19)$$

$$(MC_4)_\phi = -\frac{|\Omega_2|}{\sqrt{\frac{mg}{2c_l} - (\Omega_2)^2}} (MC_2)_\phi \quad (20)$$

- Control de *pitch*. Dado que en el movimiento de *pitch* sólo se ven implicados los rotores 1 y 3, éstos son los únicos sobre los que se aplica el control de *pitch*.

$$(MC_3)_\theta = (k_1)_\theta(\theta_{ref} - \theta) + (k_2)_\theta(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}) + (k_3)_\theta(\ddot{\theta}_{ref} - \ddot{\theta}) \quad (21)$$

$$(MC_1)_\theta = -\frac{|\Omega_3|}{\sqrt{\frac{mg}{2c_l} - (\Omega_3)^2}} (MC_3)_\theta \quad (22)$$

- Control en *yaw*. Para mantener el balance de momentos constantes alrededor de los ejes  $x$  e  $y$ , los momentos de *yaw* aplicados a rotores opuestos tienen el mismo valor, consiguiendo de esta forma que la fuerza de propulsión aumente o disminuya igualmente en dos rotores opuestos y se anule el momento de *roll* o *pitch* que producen.

$$(MC_{1,3})_\psi = (k_1)_\psi(\psi_{ref} - \psi) + (k_2)_\psi(\dot{\psi}_{ref} - \dot{\psi}) + (k_3)_\psi(\ddot{\psi}_{ref} - \ddot{\psi}) \quad (23)$$

$$(MC_{2,4})_\psi = -\frac{|\Omega_{1,3}|}{\sqrt{\frac{mg}{2c_l} - (\Omega_{1,3})^2}} (MC_{1,3})_\psi \quad (24)$$

En la ecuación (18),  $i$  continúa representando el rotor. Las variables  $x$  e  $y$  se controlan a través de la inclinación de la plataforma,  $\phi$  y  $\theta$ , por lo que no tienen un momento de control propio asignado, sino que se generan las referencias  $\phi_{ref}$  y  $\theta_{ref}$  en función de los errores de posición, velocidad y aceleración, como muestran las ecuaciones (25) y (26).

$$\phi_{ref} = -[(k_1)_y(y_{ref} - y) + (k_2)_y(\dot{y}_{ref} - \dot{y}) + (k_3)_y(\ddot{y}_{ref} - \ddot{y})] \quad (25)$$

$$\theta_{ref} = [(k_1)_x(x_{ref} - x) + (k_2)_x(\dot{x}_{ref} - \dot{x}) + (k_3)_x(\ddot{x}_{ref} - \ddot{x})] \quad (26)$$

Las referencias de  $\dot{\phi}_{ref}$ ,  $\dot{\theta}_{ref}$ ,  $\ddot{\phi}_{ref}$  y  $\ddot{\theta}_{ref}$  de las ecuaciones (19) y (21) son nulas en este momento del desarrollo de la metodología de control ya que su cálculo analítico no es trivial. Se pretende ampliar este concepto en futuras comunicaciones. Las expresiones (20), (22) y (24) se derivan de la minimización de los esfuerzos de control de altura. Para ello se intenta que la propulsión total de los rotores se mantenga constante durante el control de el resto de variables. La obtención de esta expresión se encuentra detallada en el Apéndice A.

El sistema de control completo consta de la suma de los momentos calculados para el control de cada una de las cuatro variables (altura y orientación), estando las referencias de *roll* y *pitch* calculadas de manera que se alcancen las posiciones lateral y longitudinal deseadas, mediante las ecuaciones (25) y (26).

La novedad que se presenta en este trabajo acerca de la metodología de control empleada, es el empleo del error de aceleración de las variables lineales para el cálculo de las acciones de control, así como la utilización de los parámetros de control variables para las variables controladas indirectamente. Estos parámetros del control de posición,  $(k_1)_x$ ,  $(k_2)_x$ ,  $(k_3)_x$ ,  $(k_1)_y$ ,  $(k_2)_y$  y  $(k_3)_y$ , se obtienen de la regresión no lineal a los valores que estabilizan la dinámica del quadrotor en un rango de desplazamientos de 30 metros, llevada a cabo mediante el software Sigmaplot (SigmaPlot, 2012). Las funciones de ajuste que determinan el valor de los parámetros vienen dadas por las ecuaciones (27)-(29), asegurando un coeficiente de determinación,  $r^2$ , mayor a 0.99 en todos los casos.

$$(k_1)_{x,y} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{1 + \left(\frac{\Delta}{a_3}\right)^{-a_4}} \quad (27)$$

$$(k_2)_{x,y} = \frac{a_5 + a_6\Delta}{1 + a_7\Delta + a_8\Delta^2} \quad (28)$$

$$(k_3)_{x,y} = a_9 + a_{10}\Delta + a_{11}\Delta^2 + a_{12}\Delta^3 \quad (29)$$

En las ecuaciones (27)-(29),  $\Delta$  representa la magnitud del desplazamiento que se pretende llevar a cabo, esto es, la diferencia entre la posición deseada y la posición inicial donde se encuentra el quadrotor. Tanto los valores de los parámetros de los momentos de control, correspondientes a las variables de altura y actitud en las ecuaciones (19)-(26), como de los parámetros de ajuste de las ecuaciones (27)-(29) se encuentran recogidos en la Tabla 2.

### 3.3. Prelimentación de Trayectorias

Las señales de referencia de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $\psi$  en posición, velocidad y aceleración se construyen mediante un generador de trayectorias continuas programado en Matlab. Teniendo como entradas el valor inicial de la variable correspondiente, la referencia a alcanzar, aceleración máxima permisible y el instante de tiempo en el que se desea aplicar la acción de control, el generador de trayectorias tiene como salida unas señales de referencias de posición, velocidad y aceleración suaves, de manera que los momentos aplicados a los rotores sean continuos y

Cuadro 2: Valores de los parámetros de control.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$(k_1)_\phi$	$5 \cdot 10^{-1}$	$a_1$	$3,4 \cdot 10^{-3}$
$(k_2)_\phi$	$1 \cdot 10^{-1}$	$a_2$	$1,071 \cdot 10^{-1}$
$(k_3)_\phi$	$1 \cdot 10^{-2}$	$a_3$	9,481
$(k_1)_\theta$	$5 \cdot 10^{-1}$	$a_4$	3,493
$(k_2)_\theta$	$1 \cdot 10^{-1}$	$a_5$	$-8,99 \cdot 10^{-2}$
$(k_3)_\theta$	$1 \cdot 10^{-2}$	$a_6$	$-2,132 \cdot 10^{-1}$
$(k_1)_\psi$	$8 \cdot 10^{-1}$	$a_7$	1,068
$(k_2)_\psi$	$1 \cdot 10^{-1}$	$a_8$	$-1,262 \cdot 10^{-2}$
$(k_3)_\psi$	$1 \cdot 10^{-3}$	$a_9$	$-5,58 \cdot 10^{-3}$
$(k_1)_z$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$a_{10}$	$-4,236 \cdot 10^{-2}$
$(k_2)_z$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$a_{11}$	$1,726 \cdot 10^{-3}$
$(k_3)_z$	$3 \cdot 10^{-2}$	$a_{12}$	$-4,223 \cdot 10^{-5}$

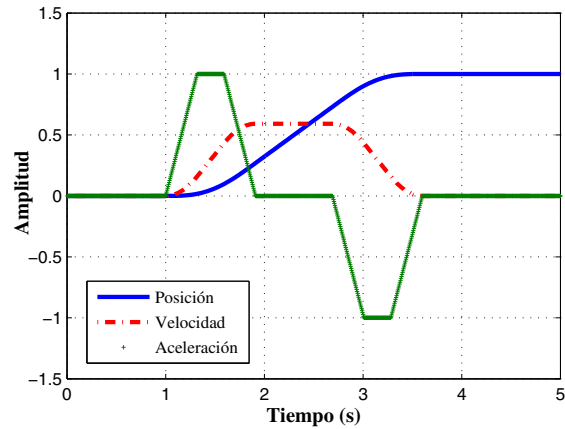


Figura 6: Muestra de referencias generadas. Referencia de posición de 1m, aceleración máxima permitida  $1m/s^2$ , tiempo de aplicación  $t = 1s$ .

no presenten escalones o discontinuidades. Para las aceleraciones se ha optado por tramos lineales en forma de rampa, evitando de esta forma las discontinuidades que aparecen en el caso de una señal de referencia escalón; por tanto, las velocidades y posiciones son representadas por señales cuadráticas y cúbicas respectivamente, tal y como muestra la Figura 6. Se pretende aumentar el orden de las señales de referencias en el futuro con el objetivo de evitar discontinuidades en las derivadas y obtener de esta manera unas acciones de control más suaves incluso. Aplicando las referencias de manera progresiva en lugar de aplicarlas simplemente como escalones en el control PVA, se consigue una respuesta mucho más suave, con menor sobreoscilación y tiempo de establecimiento.

## 4. Resultados

Una vez modelado el quadrotor, habiendo diseñado el sistema de control, tal y como se explicó en la sección anterior, con las ecuaciones (18)-(29) y los parámetros recogidos en la Tabla 2, se llevan a cabo las simulaciones.

La respuesta del vehículo ante las diferentes referencias aplicadas se encuentra representada en las Figuras 7-12, junto con la

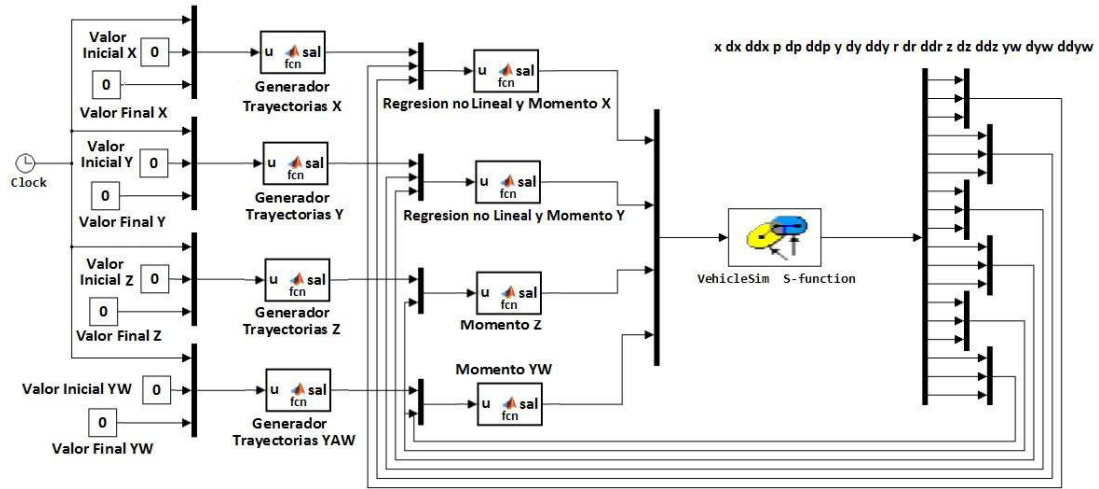


Figura 5: Montaje del sistema de control realizado mediante Simulink.

señal de referencia a seguir.

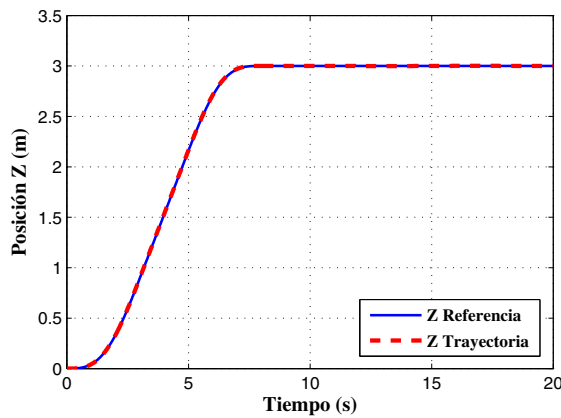


Figura 7: Referencia y trayectoria de la variable Z. Valor inicial de la referencia 0 m, valor final de la referencia 3 m, momento de aplicación  $t=0$  s

En el seguimiento de trayectorias que se observa en las Figuras 7-10 puede apreciarse la validez del control PVA y sobre todo del generador de trayectorias, que se traduce en un comportamiento rápido y estable del movimiento del quadrotor.

El tiempo de establecimiento del posicionamiento viene determinado por la referencia, a través de la aceleración máxima que se le permite, ya que ésta determina el tiempo de duración de la señal de referencia antes de alcanzar su valor final. Podría pensarse que a mayor aceleración, más rápida sería la respuesta del sistema ante una referencia, sin embargo, a medida que aumenta la aceleración se pueden producir inestabilidades en la planta debido a cambios bruscos en las velocidades angulares de los rotores. Debido a esto, se ha optado por una solución de compromiso; la aceleración máxima varía de acuerdo con la ecuación (30).

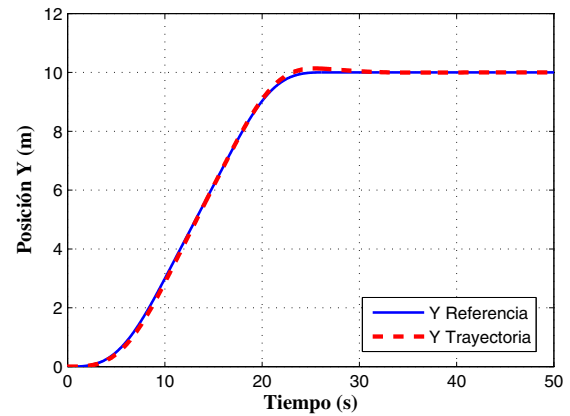


Figura 8: Referencia y trayectoria de la variable Y. Valor inicial de la referencia 0 m, valor final de la referencia 10 m, momento de aplicación  $t=0$  s.

$$A_{max} = \begin{cases} k_a & \text{si } \Delta < 1, \\ \frac{k_a}{\Delta} & \text{si } 1 \leq \Delta \leq 10, \\ 0,1k_a & \text{si } \Delta > 10. \end{cases} \quad (30)$$

Para el caso de las variables lineales  $x$ ,  $y$ ,  $z$  el valor de  $k_a$  es de 1, y para la variable angular  $\psi$  es de 0.7.

En cuanto a la orientación, en las Figuras 11 y 12 se observa el seguimiento de las trayectorias de  $\phi$  y  $\theta$  necesarias para asegurar los desplazamientos lateral y longitudinal,  $x$  e  $y$ , calculadas mediante las ecuaciones (25) y (26).

Las variables angulares  $\phi$  y  $\theta$ , controladas mediante la técnica PVA, siguen las referencias definidas presentando un pequeño retraso. Esto ocurre porque en este estadio del diseño y la implementación del control las velocidades y aceleraciones de *roll* y *pitch* no tienen prealimentada ninguna referencia. Esto es lo

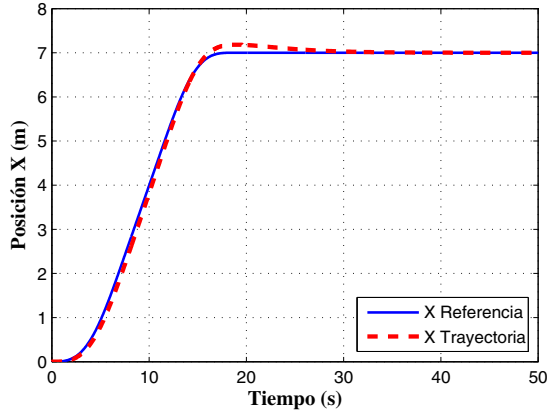


Figura 9: Referencia y trayectoria de la variable X. Valor inicial de la referencia 0 m, valor final de la referencia 7 m, momento de aplicación  $t=0$  s.

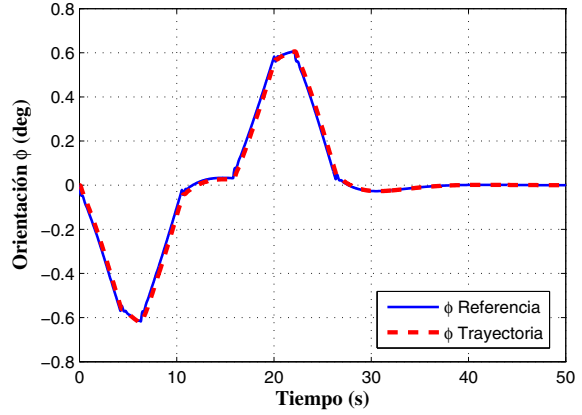


Figura 11: Referencia y trayectoria de la variable  $\phi$  para el posicionamiento correspondiente a la Figura 8.

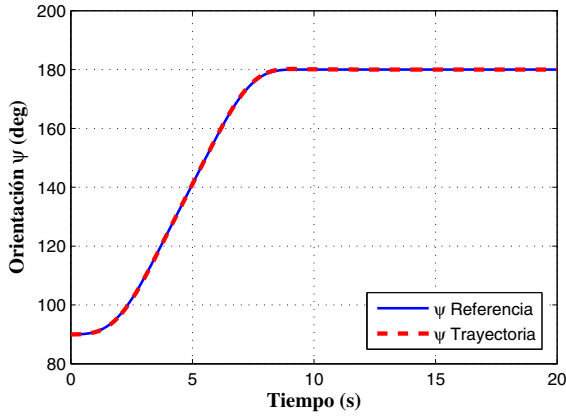


Figura 10: Referencia y trayectoria de la variable  $\psi$ . Valor inicial de la referencia  $90^\circ$ , valor final de la referencia  $180^\circ$ , momento de aplicación  $t=0$  s.

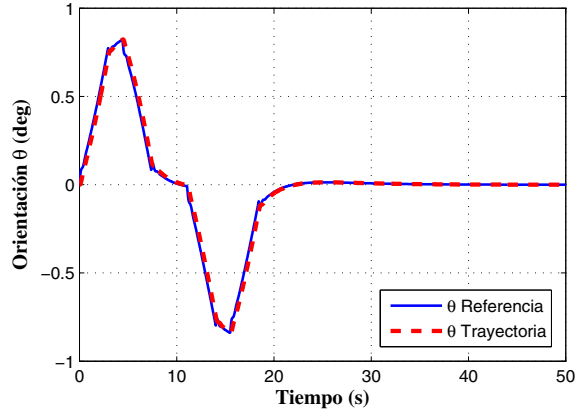


Figura 12: Referencia y trayectoria de la variable  $\theta$  para el posicionamiento correspondiente a la Figura 9.

que provoca que en el seguimiento de las referencias de posicionamiento lateral y longitudinal aparezca una pequeña sobreoscilación y mayor tiempo de establecimiento que en las otras variables,  $z$  y  $\psi$ .

A pesar de esta diferencia existente entre las señales de referencia y trayectoria, el seguimiento es satisfactorio, incluso para las trayectorias tridimensionales.

La Figura 13 representa una trayectoria de diamante con vértices  $(10, 0)$ ,  $(0, 10)$ ,  $(-10, 0)$ ,  $(0, -10)$  y altura 3 m. La Figura 14 representa una trayectoria helicoidal de radio 3 m.

La Figura 15 representa el error de posición durante el seguimiento de la trayectoria de la Figura 13, mientras que la Figura 16 representa el error asociado al seguimiento de la trayectoria helicoidal (Figura 14), variando éste entre un 5-6 %. El error porcentual se ha calculado en base a la diferencia entre la referencia y la trayectoria seguida en cada instante de tiempo, tal como indica la expresión (31), representando  $k$  el instante de

tiempo.

$$e^k(\%) = \frac{x_{ref}^k - x^k}{\Delta_x} 100 \quad (31)$$

El error en este último caso (Figura 16) es considerable debido al desfase temporal existente entre la señal de referencia y la trayectoria, ya que el sistema se encuentra en estado transitorio de manera continua. Eliminando el error temporal, basado en el tiempo de desfase entre la referencia y la trayectoria, se obtiene el error representado en la Figura 17, calculado con la expresión (32). El error inicial es mayor debido a que la corrección temporal está realizada con el desfase temporal medio,  $t_m$ , mientras que en los primeros instantes de tiempo ese desfase es menor. Aún así puede verse que el error posicional es mucho menor que en el caso anterior, encontrándose en el rango  $\pm 1,5$  %.

$$e_{corr}^k(\%) = \frac{x_{ref}^k - x^{k-t_m}}{\Delta_x} 100 \quad (32)$$

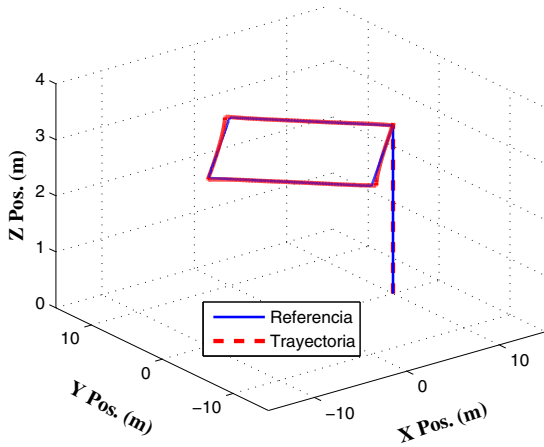


Figura 13: Referencia y trayectoria en forma de diamante.

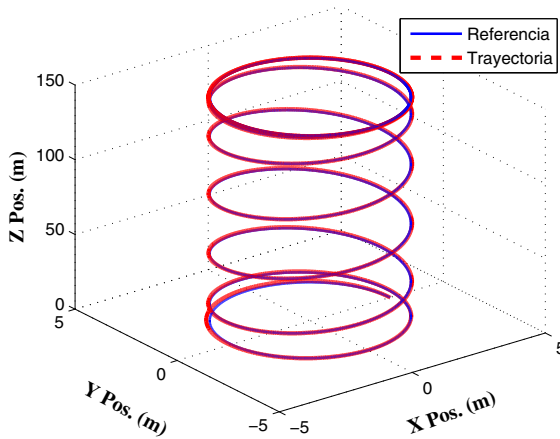


Figura 14: Referencia y trayectoria en forma helicoidal de radio 3 m.

En todos los casos, los errores han sido representados frente al tiempo adimensionalizado con el tiempo total de la simulación.

En las siguientes figuras se representa además, las acciones de control que se aplican para llevar a cabo las trayectorias señaladas en las Figuras 13 y 14 respectivamente. En estas acciones de control se encuentran incluidos los momentos de Counter Drag.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han construido las bases sobre las que implementar un modelo no lineal de un quadrotor. Debido a las características que presenta el software empleado para el modelado es posible aumentar la complejidad del modelo incluyendo otros subsistemas para modelar los diferentes dispositivos (sensores de medida, comportamiento no lineal de los rotores, comportamiento estructural de los diferentes cuerpos que forman el quadrotor y su interacción entre ellos, etc) y también propiedades que los modelos convencionales no suelen tener en cuenta

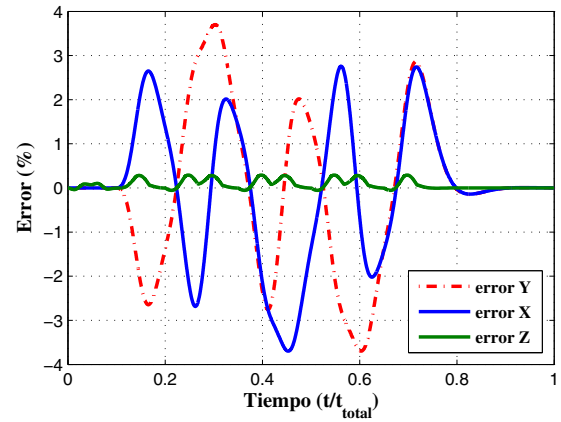


Figura 15: Error de posición en régimen transitorio para las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  en el seguimiento de la trayectoria definida en la Figura 13.

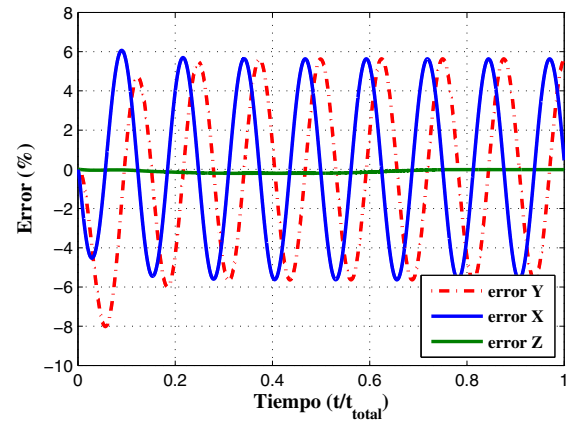


Figura 16: Error de posición en régimen transitorio para las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  en el seguimiento de la trayectoria definida en la Figura 14.

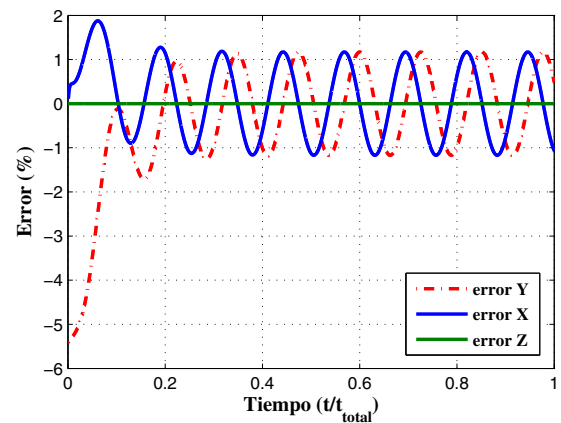


Figura 17: Error de posición en régimen transitorio para las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  en el seguimiento de la trayectoria definida en la Figura 14 eliminando el desfase temporal existente entre la referencia y la trayectoria.

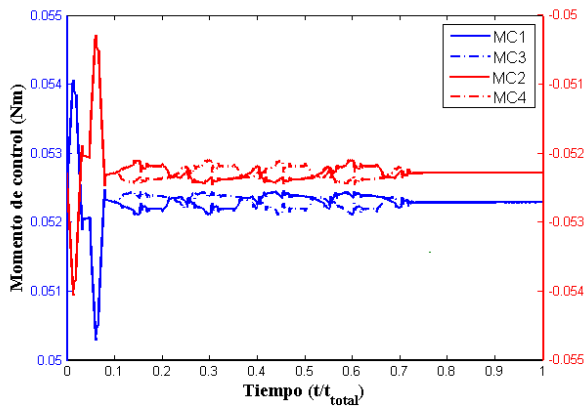


Figura 18: Acciones de control aplicadas para obtener la trayectoria indicada en la Figura 13.

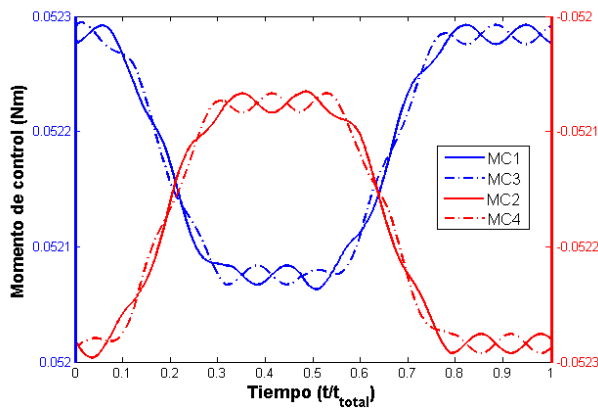


Figura 19: Acciones de control aplicadas para obtener la trayectoria indicada en la Figura 14.

(por ejemplo grados de libertad adicionales de las palas y transmisión de vibraciones a través de la estructura). Aumentar la complejidad del sistema es relativamente sencillo en este caso, dado que es VehicleSim el encargado de obtener las ecuaciones dinámicas que rigen el sistema, además de resolverlas numéricamente para las condiciones iniciales dadas.

La intención de los autores al desarrollar este modelo es proveer a la comunidad de una base para la implementación de más complejos modelos, además de disponer de una plataforma completamente controlada mediante acciones de control continuas y suaves para el posterior análisis y estudio de las vibraciones y su transmisión en dispositivos con elementos rotatorios, que planean llevar a cabo los autores en un futuro próximo.

Se ha diseñado un control basado en la metodología PVA, aportando como novedad el uso del error de aceleración de variables lineales y el empleo de parámetros de control variables aplicado a quadrotores. Empleando esta metodología de control, a través

de los momentos aplicados a los rotores, es posible estabilizar el comportamiento dinámico del quadrotor mediante acciones de control suaves, así como de satisfacer el seguimiento de trayectorias.

Los resultados de las simulaciones presentados muestran que el control aplicado, ampliamente utilizado en el control de posicionamiento de brazos articulados y otros sistemas mecánicos similares (PVA), es claramente satisfactorio para los propósitos de este artículo. Se consigue un comportamiento estable, sin error en régimen estacionario, y con un error temporal menor del 6 % y un error espacial menor del 4 % en régimen transitorio para el seguimiento de trayectorias complejas.

Actualmente los autores se encuentran trabajando en una versión del modelo más sofisticada que tiene en cuenta varios grados de libertad de las palas con respecto al eje central de los rotores. Las no linealidades que estos grados de libertad adicionales introducen en el sistema y el impacto en la dinámica del vehículo son de esta forma capturadas. Estos resultados están actualmente siendo estudiados y serán presentados en futuras contribuciones.

## English Summary

### Three-dimensional trajectory tracking of a quadrotor through PVA control.

#### Abstract

In this work the authors present the modelling of a quadrotor as a multibody system carried out with the software VehicleSim, in which the different components of the system are described in a parental structure, pointing at the physical relations between them. The structural and aerodynamic models have been developed using this software, widely employed in the vehicle dynamics' behaviour simulation.

On the resulting model, a control algorithm based in the PVA methodology has been developed in order to obtain a successful trajectory tracking through smooth control actions. Standard PVA control methods do not achieve vehicle's stabilization for all range of positions, lateral (y) and longitudinal (x). This design limitation in standard PVA methods is overcome by substituting the constant parameter on classic PVA by functions that depend on the position error.

The control system is implemented to satisfy the actuators requirements and it is designed using Simulink. A continuous trajectory generator system is derived with the objective of improving the system's positioning response.

Once the model has been developed and the control system is implemented, the authors present the mathematical model obtained and the results of the simulations carried out. These validate the modified PVA methodology and as well the methodology of predefined trajectories not only for positioning but also for velocity and acceleration tracking.

**Keywords:** quadrotor; VehicleSim; multibody modelling; trajectory control; PVA control.



## Agradecimientos

Este trabajo se realizó gracias a la beca de estudios de doctorado otorgada por The City University a Silvia Estellés Martínez.

## Referencias

- Achtelik, M., Bachrach, A., He, R., Prentice, S., Roy, N., 2008. Autonomous navigation and exploration of a quadrotor helicopter in gps-denied indoor environments. In: Robotics: Science and Systems Conference.
- Alexis, K., Nikolakopoulos, G., Tzes, A., 2012. Model predictive quadrotor control: attitude, altitude and position experimental studies. *Control Theory and Applications* 6 (12), 1812–1827.
- Altas, I. H., Sharaf, A. M., 2007. A generalized direct approach for designing fuzzy logic controllers in matlab/simulink gui environment. *International Journal of Information Technology and Intelligent Computing* 4(1).
- Büchi, R., 2011. Fascination Quadcopter. Books on Demand.
- Béjar, M., Ollero, A., 2008. Modelado y control de helicópteros autónomos. revisión del estado de la técnica. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (4), 5–16.
- Bouabdallah, S., Siegwart, R., 2007. Full control of a quadrotor. In: Proceedings of the Intelligent Robots and Systems. pp. 153–158.
- Castillo, P., Albertos, P., García, P., Lozano, R., 2006. Simple real-time attitude stabilization of a quad-rotor aircraft with bounded signals. In: IEEE Conference on Decision and Control.
- Chao, Y., Shoufeng, S., 1995. Analysis about current situation and development of helicopter dynamics. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics* 21 (2), 46–52.
- Evangeliou, S. A., Limebeer, D. J., Tomás-Rodríguez, M., 2008. Influence of road camber on motorcycle stability. In: Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics. Vol. 75 (6). pp. 61020–61032.
- Evangeliou, S. A., Limebeer, D. J., Tomás-Rodríguez, M., 2012. Suppression of burst oscillations in racing motorcycles. In: Accepted for publication at Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics.  
DOI: 10.1115/1.4006491
- Giraldo, M. V. P., Gonzales, E. C. V., Feliciano, C. I. R., 2010. Modelamiento dinámico y control lqr de un quadrotor. In: Avances: Investigación e Ingeniería. Vol. 13. pp. 71–86.
- Hajjaji, E., Ouladsine, M., 2001. Modeling and nonlinear control of magnetic levitation systems. In: IEEE Transactions on Industrial Electronics. Vol. 48 (4). pp. 831–838.
- Hoffmann, G., Rajnarayan, D. G., Waslander, S. L., Dostal, D., Jang, J. S., Tomlin, C. J., 2004. The stanford testbed of autonomous rotorcraft for multi agent control (starmac). In: Digital Avionics Systems Conference. Vol. 2. pp. 12.E.4–1–12.E.4–10.
- Karden, E., Buller, S., Kok, D., Doncker, R. W. D., 2002. Modeling the dynamic behavior of supercapacitors using impedance spectroscopy. In: IEEE Transactions on Industry Applications. Vol. 38(6). pp. 1622–1626.
- Kourosh, P., 2007. The lagrangian derivation of kane's equations. In: Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. Vol. 31. pp. 407–420.
- Le-Huy, H., 2001. Modeling and simulation of electrical drives using matlab simulink and power system blockset. In: Annual Conference of the Industrial Electronics Society. Vol. 3. pp. 1603–1611.
- Lee, G., Jeong, D. Y., Khoi, N. D., Kang, T., 2011. Attitude control system design for a quadrotor flying robot. In: International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence.
- Mian, A. A., Daobo, W., 2008. Nonlinear flight control strategy for an underactuated quadrotor aerial robot. In: International Conference on Networking, Sensing and Control.
- Mousseau, C. W., Sayers, M. W., Fagan, D. J., 1992. Symbolic quasi-static and dynamic analyses of complex automobile models. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility* 20 (1), 446–459.
- Ning, S., Bone, G. M., 2002. High steady-state accuracy pneumatic servo positioning system with pva/pv control and friction compensation. In: Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. Vol. 3. pp. 2824–2829.
- Ollero, A., Maza, I., 2007. Multiple Heterogeneous Unmanned Aerial Vehicles. Springer Berlin, Heidelberg.
- Pivonka, P., Miksánek, V., 2007. Real-time communication between matlab/simulink and plc via process visualization interface. In: Proceedings of the WSEAS International Conference on SYSTEMS. Vol. 2. pp. 28–32.
- Plasencia, G. N. M., Rodríguez, M. T., Campoy, P., Ángela Hernández López, Rivera, S. C., 2012. Reducción de las vibraciones de un sistema de visión a bordo de un helicóptero mediante un controlador inteligente. In: XXXIII Jornadas de Automatica, Vigo.
- Qiu, A., Wu, B., Kojori, H., 2004. Sensorless control of permanent magnet synchronous motor using extended kalman filter. In: Canadian Conference on Electrical and Computing Engineering. Vol. 3. pp. 1557–1562.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G., Rubio, F. R., 2010. An integral predictive/nonlinear h-infinity control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica* 46, 29–39.
- Ramírez, C. M., Tomás-Rodríguez, M., Evangeliou, S. A., 2012. Análisis dinámico y modelado de suspensiones hockack en motocicletas de competición. In: XXXIII Jornadas de Automatica, Vigo.
- Ropp, M. E., González, S., 2009. Development of a matlab/simulink model of a single-phase grid-connected photovoltaic system. In: IEEE Transactions on Energy Conversion. Vol. 24 (1). pp. 195–202.
- Sharp, R. S., Evangeliou, S., Limebeer, D. J. N., 2004. Advances in the modeling of motorcycle dynamics. *Multibody System Dynamics* 12(3), 251–283.
- Sharp, R. S., Evangeliou, S., Limebeer, D. J. N., 2005. Multibody aspects of motorcycle modeling with special reference to autosim. *Advances in Computational Multibody Systems* 2, 45–68.
- SigmaPlot, 2012. Visitado a fecha de 28 de junio 2012.  
URL: <http://www.sigmaplot.com/products/SigmaPlot/>
- Simulink, 2012. Visitado a fecha de 28 de junio 2012.  
URL: <http://www.mathworks.co.uk/products/simulink>
- Steele, J., Guy, L., 1984. Common Lisp: The language. Digital Press.
- Tarek, M., Abdelaziz, B., 2007. Sliding mode observer and backstepping control for a quadrotor unmanned aerial vehicles. In: ACC, American Control Conference.
- Tomás-Rodríguez, M., Sharp, R., 2007. Automated modeling of rotorcraft dynamics with special reference to autosim. In: CASE, IEEE International Conference Automation Science and Engineering.
- VehicleSim, 2012. Visitado a fecha de 28 Junio 2012.  
URL: <http://www.carsim.com/>
- Voos, H., 2007. Nonlinear and neural network-based control of a small four-rotor aerial robot. In: International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics.
- Zhou, Q.-L., Zhang, Y., Rabbath, C.-A., Theilliol, D., 2010. Design of feedback linearization control and reconfigurable control allocation with application to a quadrotor uav. In: Conference on Control and Fault-Tolerant Systems.

## Apéndice A. Relación de momentos

Para mantener la sustentación constante durante el control de las variables *roll*, *pitch* y *yaw* es necesario que el aumento de sustentación de un rotor sea igual al descenso de la sustentación en el otro rotor que controla el respectivo movimiento. Para que esto ocurra se tiene que dar la relación entre los momentos expresada en las ecuaciones (20), (22) y (24). A continuación se detalla como se ha llegado a esa expresión para el caso del momento de *roll* siendo el desarrollo semejante para el resto de las variables.

Se mantiene la sustentación constante, con el valor necesario para garantizar un vuelo estacionario

$$L = mg$$

$$c_l(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 + 2\Omega_0^2) = mg \quad (A.1)$$

La aceleración angular está relacionada con el momento aplicado a través de la inercia de rotación del rotor mediante la ecuación (A.2)

$$M = J_r \dot{\Omega} \quad (A.2)$$

Integrando la ecuación (A.2) se obtiene que las velocidades angulares de los rotores son

$$\Omega_{2,4} = \int \frac{M_{2,4}}{J_r} dt \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo las expresiones de las velocidades angulares dadas por la ecuación (A.3) en la ecuación (A.1) se obtiene otra expresión para el mantenimiento de la condición de vuelo estacionario, donde esta vez aparecen los momentos

$$c_l \left( \int \left( \frac{M_2}{J_r} \right)^2 dt + \int \left( \frac{M_4}{J_r} \right)^2 dt + 2\Omega_0^2 \right) = mg \quad (\text{A.4})$$

Sustituyendo el valor de  $\Omega_0$  en la ecuación (A.4) y reordenando se obtiene

$$\int \left( \frac{M_4}{J_r} \right) dt = \sqrt{\frac{mg}{2c_l} - \int \left( \frac{M_2}{J_r} \right)^2 dt} \quad (\text{A.5})$$

Derivando la ecuación (A.5) respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \left( \int \left( \frac{M_4}{J_r} \right) dt \right) = -2 \frac{1}{2} \frac{\int \left( \frac{M_2}{J_r} \right) dt}{\sqrt{\frac{mg}{2c_l} - \int \left( \frac{M_2}{J_r} \right)^2 dt}} \frac{d}{dt} \left( \int \left( \frac{M_2}{J_r} \right) dt \right) \quad (\text{A.6})$$

Teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que la ecuación (A.6) puede reescribirse como muestra la

ecuación (A.7) ya que la aceleración angular es continua en el intervalo  $[0, t]$

$$\left( \frac{M_4}{J_r} \right) = - \frac{\int \left( \frac{M_2}{J_r} \right) dt}{\sqrt{\frac{mg}{2c_l} - \int \left( \frac{M_2}{J_r} \right)^2 dt}} \left( \frac{M_2}{J_r} \right) \quad (\text{A.7})$$

Introduciendo por último la expresión (A.3) en la ecuación (A.7) se llega a la expresión (A.8), que era lo que se pretendía.

$$\frac{M_4}{J_r} = - \frac{\Omega_2}{\sqrt{\frac{mg}{2c_l} - (\Omega_2)^2}} \frac{M_2}{J_r} \quad (\text{A.8})$$

Esta relación entre los momentos aplicados a los dos rotores facilita la disminución del esfuerzo de control de altura, ya que ayuda a mantener la sustentación constante durante otras maniobras.

**Teorema Fundamental del Cálculo. Apéndice A.1.** Si  $f(x)$  es una función continua y derivable en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $a \in I$ , entonces la función  $G$  definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(x) dx$$

es derivable en  $\text{int}(I)$  y además  $G'(x) = f(x)$  en  $\text{int}(I)$ .